Γιάννης Π. Πλατάρος

_« Ανάλυση των χωρίων (Αναλυτικά Ύστερα 76a31-77a4 και Τοπικά 158b24-159a2) σχετικά με την αξιωματική μέθοδο. Ανάπτυξη των επιπτώσεων που έχει αυτή η ανάλυση στην Ιστορία των μαθηματικών , σχετικά με την θεωρία λόγων αριθμών και μεγεθών.»

Αριστοτέλης «Αναλυτικά ύστερα» 76a31-77a4

Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύ τας ἃς ὅ τι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. t..mèν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τού των, λαμβάνεται, ὅ τι δ' ἔστι, τὰj mèν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύ ναι· οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐ θὺ καὶ τρίγωνον, eἶναι δὲ τὴ ν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύ ναι.

Ἔστι δ' ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις t¦ mèν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, koin¦ dè κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμό ν γε ὅ σον ἐν τῷ ὑ πὸ τὴ ν ἐπιστήμην γένει· ‡dia mèν οἷον γραμμὴ ν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐ θύ , koin¦ dè οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅ τι ἴσα τὰ λοιπά. ἱκανὸ ν δ' ἕκαστον τού των ὅ σον ἐν τῷ γένει· ταὐ τὸ γὰρ ποιή- σει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μό νον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν.

Ἔστι δ' ‡dia mèν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑ πάρχοντα καθ' αὑ τά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ¹ dè γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς. ταῦτα γὰρ λαmb£nousi tÕ eἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. t¦ dè τού των πάθη καθ' αὑ τά, t..mèν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ mèν ἀριθμητικὴ τί περιττὸ ν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύ βος,

¹ dὲ γεωμετρία τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, ὅτι δ' ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων. καὶ ἡ ἀστρολογία ὡσαύτως. πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, Ósa te eἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει. ™H.aj mšntoi ™pist»maj oÙdὲν κωλύει ἔνια τούτων παρορᾶν, oŒon tÕ gšnoj m¾ Øpot.qesqai eἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι ἔστιν (οὐ γὰρ ὁμοίως δῆλον ὅτι ἀριθμός ἐστι καὶ ὅτι ψυχρὸν καὶ θερμόν), καὶ τὰ πάθη μὴ λαμβάνειν τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλα· ésper oÙdὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. ἀλλ' oÙdὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν.

Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, Ö ¢n£gkh eἶναι δι' αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ ™peˆ oÙdὲ συλλογισμός. ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. Ósa mὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ', ™¦n mὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ¨n dὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται. καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμ-

βάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας.

Of mὲν οὖν ὅροι οὐκ εἰσὶν ὑποθέσεις (oÙdὲν γὰρ εἶναι ἢ μὴ λέγεται), ἀλλ' ἐν ταῖς προτάσεσιν αἱ ὑποθέσεις, τοὺς δ' ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ· τοῦτο δ' οὐχ ὑπόθεσις (εἰ μὴ καὶ tÕ ¢koÚein ØpÒqes.n tij eἶναι φήσει), ἀλλ' ὅσων ὄντων τῷ ™ke‹na eἶναι γίνεται τὸ συμπέρασμα. (οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ésper tinὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, tÕn dὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. Ð dὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.) ἔτι τὸ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις πᾶσα ἢ ὡς ὅλον ἢ ὡς ἐν μέρει, οἱ δ' ὅροι οὐδέτερον τούτων.

<u>Ανάλυση στα «Αναλυτικά Ύστερα» 76^{α}31-77^{α}4 του Αριστοτέλους</u>

Στα «Αναλυτικά Ύστερα» ο Αριστοτέλης παρουσιάζει τις γενικές αρχές πρότυπα που θα πρέπει να εκπληροί κάθε επιστήμη. Πρόκειται για εξαιρετικής σημασίας έργο, καθώς εναργέστατα ο «Θείος» Αριστοτέλης παρουσιάζει τις θεμελιώδεις δομές των επιστημών, οι οποίες κατ΄ ουσίαν είναι ίδιες.

Λέει:

Ονομάζω **αρχές σε κάθε γένος** εκείνες για τις οποίες το ότι υπάρχουν **δεν** μπορεί να αποδειχθεί. Το τι λοιπόν σημαίνουν οι όροι «πρώτες αρχές» καθώς και «οι ιδιότητες που απορρέουν από αυτές» θεωρείται ως δεδομένο. Ως προς **το ότι όμως υπάρχουν** , για μεν τις αρχές

θεωρείται κατ΄ ανάγκην δεδομένο, ενώ για τα άλλα **θα πρέπει να αποδεικνύεται.** Γι παράδειγμα το τι είναι η μονάδα ή τι είναι ευθύ ή τρίγωνο, (αυτά είναι δεδομένα) . Και ενώ είναι δεδομένη η ύπαρξη του της μονάδας και του μεγέθους, **η ύπαρξη των λοιπών θα πρέπει να αποδεικνύεται.**

Από τις αρχές που χρησιμοποιούμε στις αποδεικτικές επιστήμες, άλλες ανήκουν **αποκλειστικά** σε κάθε επιστήμη, και άλλες είναι **κοινές.** Και βέβαια πρέπει να χρησιμοποιούνται από κοινού, κατ΄ αναλογίαν , επειδή χρησιμοποιούνται στο μέτρο μόνο που εμπίπτουν στο γένος που ανήκει η κάθε επιστήμη.

Παράδειγμα αποκλειστικής αρχής, είναι το ότι η «γραμμή» και το «ευθύ» είναι το τάδε συγκεκριμένο πράγμα και κοινή αρχή είναι ότι **αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπολειπόμενα θα είναι ίσα.** . Από αυτές όμως τις αρχές, ισχύει μόνο ένα μέρος, όσο κάθε φορά αρμόζει στο δεδομένο γένος. Ο Γεωμέτρης την εφαρμόζει μόνο στα μεγέθη ή άλλος την εφαρμόζει μόνο στους αριθμούς.

Επίσης είναι **αποκλειστικά** για κάθε επιστήμη , και τα αντικείμενα που εκλαμβάνει ως **υπαρκτά,** και αυτά τα οποία μελετά ως προς τις **ιδιότητές τους**. , όπως για παράδειγμα οι μονάδες για την αριθμητική και οι γραμμές ή τα σημεία για την γεωμετρία. . Πράγματι, για τα αντικείμενα αυτά είναι δεδομένο το ότι υπάρχουν καθώς και ότι είναι συγκεκριμένα. Σε σχέση όμως με τις ιδιότητές τους, μόνο το **τι σημαίνει** η κάθε μία ιδιότητα θεωρείται ως δεδομένο. Για παράδειγμα θεωρείται ως δεδομένο από την Αριθμητική, το τι σημαίνει περιττός ή άρτιος ή τετράγωνο ή κύβος. Και για την Γεωμετρία το τι είναι χωρίς λόγο, ή τεθλασμένη ή η νεύσις. Το ότι αυτά υπάρχουν , αποδεικνύεται μόνο μέσα από τις κοινές τους αρχές αλλά και από τα συμπεράσματά τους που έχουν ήδη

αποδειχθεί. Το ίδιο ισχύει και για την αστρολογία. Κάθε λοιπόν αποδεικτική επιστήμη, στρέφεται κυρίως γύρω από τρία πράγματα: **Εκείνα που θεωρεί ότι υπάρχουν** (αυτά είναι το γένος του οποίου εξετάζει τις καθ ΄αυτές ιδιότητες) **τα λεγόμενα κοινά αξιώματα** με βάση τα οποία πραγματοποιείται η απόδειξη (ως πρώτα προκείμενα) και τρίτον **τις ιδιότητες** , για τις οποίες η επιστήμη θεωρεί ως δεδομένο το τι σημαίνουν . Τίποτα ωστόσο δεν εμποδίζει τις επιστήμες να **παραβλέπουν** ορισμένες από αυτές τα τρία αυτά πράγματα. Για παράδειγμα, μπορεί να υποθέτει ότι υπάρχει το γένος, αν είναι πρόδηλο και προφανές ότι υπάρχει (και δεν είναι το ίδιο προφανές ότι υπάρχει αριθμός με το ότι υπάρχει ψυχρό ή θερμό.) . Επίσης η επιστήμη , μπορεί να μην αναφέρει ρητά για το τι σημαίνουν οι ιδιότητες, αν συμβαίνει να είναι προφανείς. Αυτό γίνεται στις κοινές αρχές, όπου γίνεται ρητή μνεία του τι σημαίνει να αφαιρεθούν από ίσα, επειδή αυτό είναι γνωστό.
Σε κάθε περίπτωση, αυτές οι εξαιρέσεις, δεν εμποδίζουν σε τίποτα να είναι τρία τα εκ φύσεως συστατικά μέρη της απόδειξης, δηλαδή:

- **<u>Το αντικείμενο της απόδειξης</u>**
- **<u>Οι προς απόδειξιν ιδιότητες</u>**
- **<u>Οι αποδεικτικές αρχές</u>**

Δεν είναι εξ άλλου ούτε υπόθεση ούτε αίτημα αυτό που υπάρχει από μόνο του και αυτό που θεωρούμε ότι υπάρχει , επειδή η απόδειξη από μόνη της δεν απευθύνεται στον έξω λόγο, αλλά στον λόγο της ψυχής. Και είναι αληθές, ότι μπορεί πάντα κάποιος να προβάλλει ενστάσεις στον εξωτερικό λόγο. Όχι όμως πάντα και στον εσωτερικό. Όσα λοιπόν είναι αποδείξιμα, τα θεωρεί ο δάσκαλος ως δεδομένα , χωρίς να τα αποδείξει , αν συμβεί να τα θεωρεί ως δεδομένα με την συναίνεση του μαθητή . Αποτελούν δε αντικείμενο υποθέσεως και είναι υπόθεσις, όχι με την

απόλυτη έννοια, αλλά αναφορικά μόνο με τον μαθητή. . Αν πάλι συμβαίνει να θεωρεί το ίδιο πράγμα ως δεδομένο ή ο μαθητής δεν έχει καμία γνώμη ή έχει αντίθετη γνώμη σε αυτό, τότε πρόκειται για αίτημα. Και σε ακριβώς αυτό διαφέρουν η υπόθεση από το αίτημα. Δηλαδή, το αίτημα είναι αντίθετο με την γνώμη του μαθητή, ή κάθε πρόταση αποδείξιμη, την οποία κάποιος θεωρεί ως δεδομένη και την χρησιμοποιεί χωρίς απόδειξη. Οι όροι λοιπόν δεν είναι υποθέσεις, διότι δεν λένε τίποτα για το αν κάτι είναι ή δεν είναι , αλλά οι υποθέσεις, είναι στις προτάσεις της κάθε επιστήμης που ανήκουν.
Οι όροι, πρέπει απλώς και μόνο να γίνονται κατανοητοί. Αυτό όμως δεν συνιστά υπόθεση (Εκτός αν κάποιος έλεγε ότι με το να ακούει κάτι , αυτό είναι υπόθεση) Αντίθετα, υποθέσεις είναι όλα εκείνα , τα οποία με το να είναι όπως είναι, μπορεί να παράγεται το συμπέρασμα.
Ούτε πρέπει να λέμε ότι κάνει ψευδείς δηλώσεις ο Γεωμέτρης που διατείνεται ότι μια γραμμή έχει μήκος ένα πόδι , ενώ δεν έχει, ή ότι είναι ευθεία κάτι ,ενώ δεν είναι . Ο Γεωμέτρης, δεν συμπεραίνει το παραμικρό από την συγκεκριμένη γραμμή που μνημονεύει, αλλά συμπεραίνει αποκλειστικά από όσα φανερώνουν τα σχήματά του. Εξ άλλου , κάθε αίτημα και κάθε υπόθεση, νοούνται είτε ως όλον είτε ως μέρος. Ενώ οι ορισμοί δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Τοπικα158b24-159a2

Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁ ρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, oŒon pÒt er on ž n ˜n ˆ ἐναντίον ἢ πλείω· Ðr i s qšnt wn dὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρό πον ῥᾴδιον sumbib£sai pÒt er on ™ndšcet ai pl e.w tù aÙt ù eἶναι ἐναντία ἢ οὔ . τὸ ν aÙt Õn dὲ τρό πον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁ ρισμοῦ δεομένων. œoi ke dὲ καὶ

ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. toà dè ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος. ¡ pl îj dè τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων tiqemšnwn mèn τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ t¦ ¢n¦ mšson eἶναι)· ¨n dè μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως ἀδύνατον. Ðmo.wj dè τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους ἔχει.

Απόδοση του χωρίου.

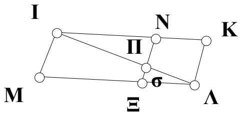
Για πολλές θέσεις - λόγω του ότι δεν έχει αποδοθεί σωστά ο ορισμός- δεν είναι εύκολο να τις συζητήσει κανείς και να τις καταπολεμήσει, όπως για παράδειγμα , αν ένα μοναδικό πράγμα έχει ή όχι περισσότερο από ένα ενάντια. Αν όμως τα ενάντια ορισθούν όπως πρέπει , τότε θα ήταν δυνατόν να συμπεράνει κανείς , αν το ίδιο πράγμα έχει ή όχι, περισσότερα από ένα ενάντια .Με αυτό τον τρόπο χειρίζεται κάποιος και όλα τα άλλα πράγματα που χρειάζονται ορισμό. Φαίνεται και ότι στα Μαθηματικά, **κάποια πράγματα, ένεκα ελλείψεως ορισμού, δεν είναι εύκολο το να γράφονται (εννοεί εδώ για αποδείξεις με γεωμετρικά σχήματα) Για παράδειγμα[1], ότι η τέμνουσα ένα ορθογώνιο**

---

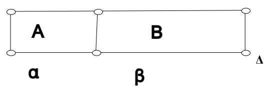
[1] Κάποιες μεταφράσεις του χωρίου (λ.χ.Αριστοτέλης «άπαντα, Όργανον 3» Εκδόσεις Κάκτος) ερμηνεύουν προφανώς **λανθασμένα** το σχήμα, λαμβάνοντας τον λόγο στον οποίο διαιρεί η παράλληλος την διαγώνιο ίσο

παραλληλόγραμμο, και είναι παράλληλη σε μια πλευρά του, διαιρεί όμοια και την πλευρά και το εμβαδόν[2]. Αν δε δοθεί ρητά ο ορισμός, καθίσταται φανερόν αυτό που λέμε, διότι την ίδια ανταναίρεσιν [3]έχουν τα χωρία και οι γραμμές. Και αυτός είναι ο ορισμός των ίσων λόγων[4]. Κατά απόλυτο τρόπο, είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν οι πρώτες στοιχειώδεις αρχές, από την στιγμή που έχουν δοθεί οι κατάλληλοι ορισμοί, για παράδειγμα το τί είναι η γραμμή και τί ο κύκλος. (Αν και τα επιχειρήματα που μπορεί να επικαλεσθεί κάποιος για κάθε μία

με τον λόγο των εμβαδών . μαθηματικά μεν είναι σωστό, αλλά **δεν προκύπτει από το κείμενο.**



ΠΙ / ΠΛ= (ΞΝΙΜ) / (ΞΝΛΚ)

2 

Δηλαδή α/β =Α/Β (=αγ/βγ)

3 Δηλαδή τα έχοντα την ίδια ανθυφαίρεση (=ίδια αμοιβαία αφαίρεση) Ο Πλάτων επίσης χρησιμοποιεί την λέξη ανταναίρεση, αντί για ανθυφαίεση. Σύμφωνα με τον σχολιαστή του Πλάτωνα τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα($3^{ο}$ –$4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) , ο οποίος σχολιάζει τα «Τοπικά» ο όρος ανταναίρεσις (όρος του Πλάτωνα) είναι η ανθυφαίσεσις.
Σημαντικό είναι που ο Αριστοτέλης δεν επικαλείται άλλους λόγους (όπως έλλειψη αξιωμάτων ή δυσκολίες αποδεικτικές ή μη πληρότητα της θεωρίας, αλλά μόνο την έλλειψη καταλλήλου ορισμού)

4 Δηλαδή αν α, β γραμμές και Α , Β χωρία, τότε (α/β=Α/Β)⇔[Ανθ(α,β)=Ανθ(Α,Β)] Αυτό ουσιαστικά συνιστά ορισμό ισότητας λόγων μεταξύ αριθμών γραμμών και μεγεθών . Μάλιστα εδώ συμπεριλαμβάνονται όλες οι ανθυφαιρέσεις περιοδικές ή περατούμενες που ουσιαστικά μπορούν να ορίσουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

από αυτές δεν είναι πολλά , επειδή δεν υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα[5]) Αντιθέτως, αν οι ορισμοί δεν έχουν δοθεί, αυτό είναι πάρα πολύ δύσκολο έως αδύνατον.

Όμοια αυτά, παρόμοια ισχύουν και για τους διαλεκτικούς συλλογισμούς.

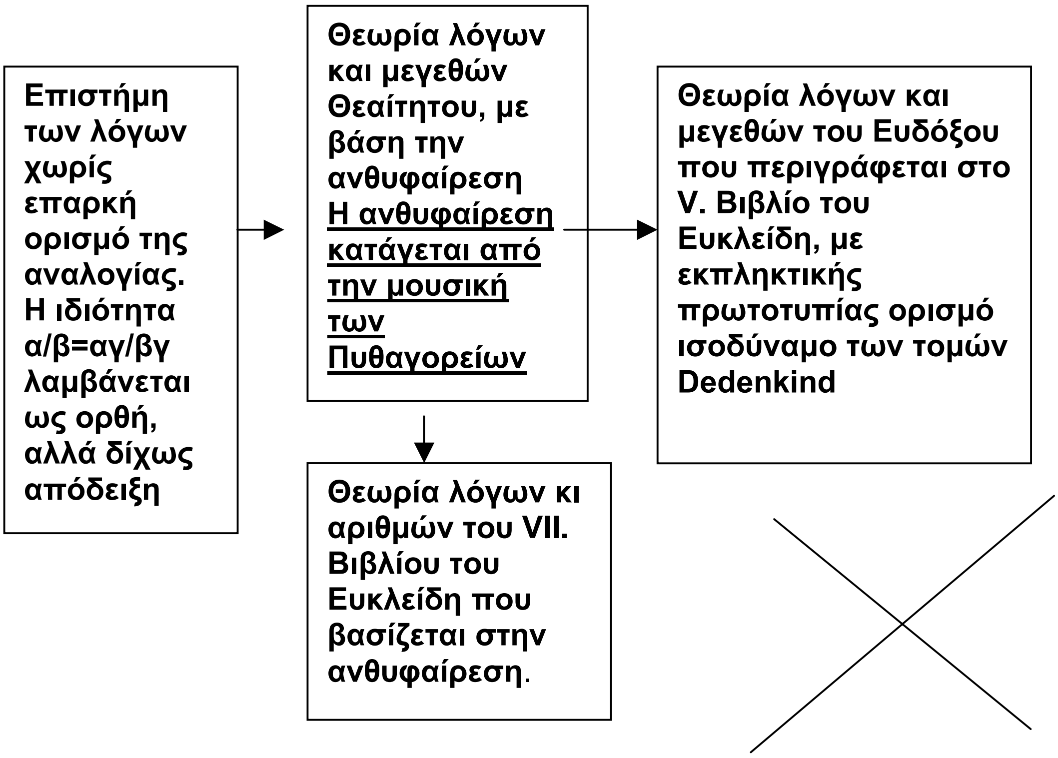
Η θεωρία λόγων , αριθμών και μεγεθών πριν τον Ευκλείδη

Θα πρέπει να φανταστούμε μια περίοδο πριν από τον Ευκλείδη, στην οποία δεν υπήρχε καλός ορισμός της αναλογίας. Πρέπει έτσι να συμπεράνουμε, ότι και με βάση την προαναφερθήσα παρατήρηση του Αριστοτέλη (υποσημειώσεις 2 και 3) ότι υπήρχε μια παλιά χαμένη θεωρία λόγων και μεγεθών , από όπου προέκυψε η θεωρία λόγων και αριθμών του Θεαίτητου με βάση την ανθυφαίρεση.

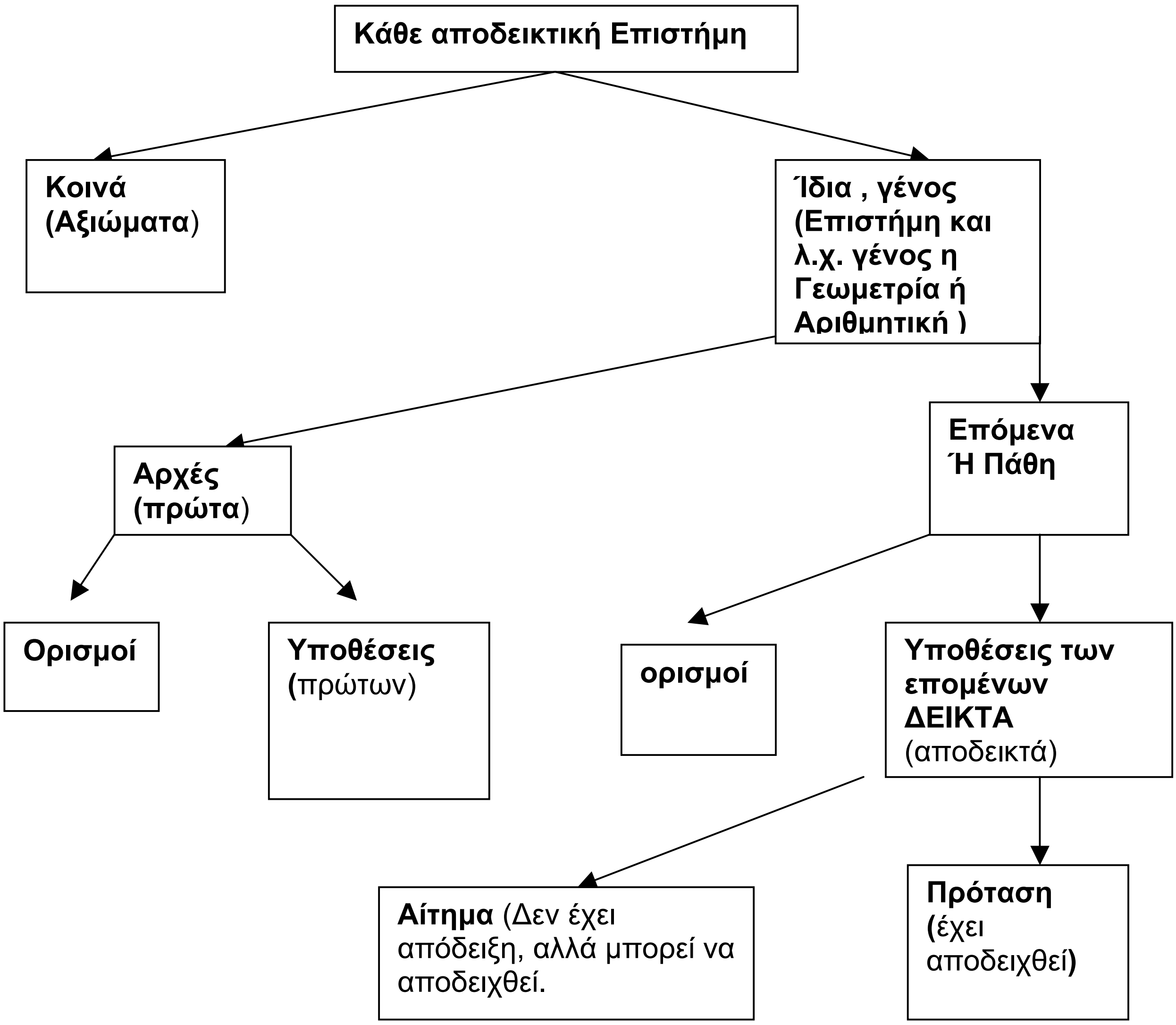
Από αυτήν προέκυψε η θεωρία λόγων του Ευδόξου που παρουσιάζει στο V βιβλίο του ο Ευκλείδης. Η δε θεωρία λόγων που εμφανίζεται στο VII βιβλίο φαίνεται να είναι προκύπτουσα από την θεωρία του Θέωνος . Σχηματικά έχουμε το εξής:

[5] Εδώ , κατά την γνώμη του γράφοντος, ο Αριστοτέλης εκφράζει μια διαπίστωση που έχομε στα μαθηματικά, δηλ: Όταν μια θεωρία εξελίσσεται, τότε τα πρότερα προβλήματα που λύνονταν με πολλές διαδικασίες και βήματα, τώρα πλέον επιλύονται απλούστερα.

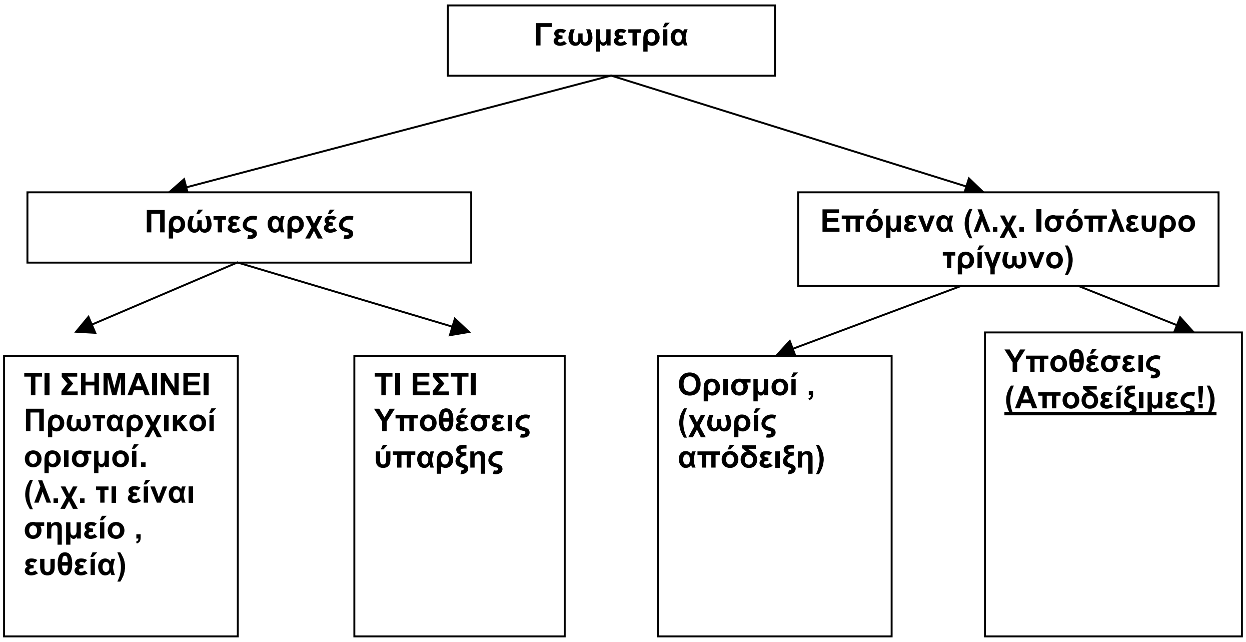
Η εξέλιξη της Θεωρίας λόγων μεγεθών και αριθμών



Σχηματικά οι Αρχές που εισηγείται ο Αριστοτέλης για κάθε επιστήμη και διαφαίνονται στα «Αναλυτικά Ύστερα»



<u>Η παραπάνω δομή του Αριστοτέλους στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας</u>



<u>Μια λεπτομερστερη Ανάλυση για τα τρία είδη επιστημονικών αρχών</u>

Ο Αριστοτέλης περιγράφει όπως είδαμε τα είδη των αρχών κάθε αποδεικτικής επιστήμης , ως **Ορισμούς, Υποθέσεις κι Αξιώματα ή κοινές έννοιες**[6] συμπληρώνοντας ότι θέλουν διευκρίνιση:

Έτσι ο Αριστοτέλης, μας λέει διευκρινίζει ότι οι ορισμοί και οι υποθέσεις είναι «ίδιαι αρχαί» ενώ τα αξιώματα είναι κοινά.[7] Με αυτή την διάκριση,

---

[6](Αναλυτικά Ύστερα 72a 14-21) «Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα· ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦτα· τοῦτο γὰρ μάλιστ' ἐπὶ τοῖς τοιούτοις εἰώθαμεν ὄνομα λέγειν. θέσεως δ' ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑπόθεσις, ἡ δ' ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστι»

εννοεί ότι το αξίωμα χρησιμοποιείται σε περισσότερες από μία επιστήμες, ενώ ορισμοί και υποθέσεις είναι όπως είπαμε ίδιες έννοιες υπό την έννοια του μη κοινές. Ανήκουν λοιπόν σε μία επιστήμη , αφού μία επιστήμη μελετά ένα γένος ή ένα υποκείμενο γένος , το οποίο αποτελείται από τις οντότητες που εξετάζει.(Λ.χ. Οι αριθμοί είναι το υποκείμενο μέγεθος της Αριθμητικής ή στην Γεωμετρία το μέγεθος)

Πιο συγκεκριμένα:

1)για τους ορισμούς

χρησιμοποιεί παρεμφερείς όρους , όπως **Όροι, ορισμοί, τι είναι , τι σημαίνει**. Έτσι ο ορισμός κάποιου πράγματος, θέτει την ουσία του (δηλ. το τι είναι) Γενικότερα στο έργο του ο Αριστοτέλης, θεωρεί ότι οι ορισμοί έχουν την μορφή Γένος συν την ειδοποιό διαφορά.[8] Επίσης οι ορισμοί δεν μπορούν να αποδειχθούν και ότι την αλήθεια τους την θεωρούμε αναγκαία.

2)Για τις υποθέσεις

αντιπαρατίθενται στο οικείο χωρίο των Α.Υ. και χρησιμοποιεί το χαρακτηριστικό παράδειγμα :Η απάντηση στο ερώτημα «Τί είναι η μονάς» , συνιστά τον ορισμό της μονάδος. Το ότι όμως «Υπάρχει μονάς» συνιστά υπόθεση. Δηλαδή ο Αριστοτέλης με τον όρο υπόθεση, περιγράφει τις προϋποθέσεις ύπαρξης. Διευκρινίζει όμως ότι η ύπαρξη των παραγομένων υποκειμένων , ακολουθεί την ύπαρξη των πρωταρχικών. Για παράδειγμα, όταν ο Ευκλείδης στην 3η κοινή έννοια

---

[7] (Αν. ΄Υστ.76α 37-38) « Ἔστι δ' ïn crînt ai ™n ta‹j ¢podeiktika‹j ™pist»maij t¦ mὲν ἴδια ἑκάsthj ™pist»mhj t¦ dὲ κοινά»

[8] Richard Mc Kirahan «Η φιλοσοφία η επιστήμη και τα μαθηματικά τον 4ο αιώνα»σελ. 9 Δευκαλίων18/1 2000 εκδόσεις «Στιγμή»

λέει ότι αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα , τα καταλοιπόμενα θα είναι ίσα, ακολουθεί ουσιαστικά αυτή την απαίτηση του Αριστοτέλη.
Επίσης, η ύπαρξη των ιδιοτήτων αποδεικνύεται, μέσα από την ύπαρξη των υποκειμένων. Για να γίνει αυτό σαφές , για παράδειγμα, αποδεικνύουμε ότι μια ιδιότητα της Γεωμετρίας (όπως η παραλληλία) υπάρχει, όταν αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.[9]

<u>3) Για τα αξιώματα ή κοινές αρχές:</u>

Είναι οι μόνες αρχές που δεν περιορίζονται αποκλειστικά σε μία μόνο επιστήμη.
Ο Αριστοτέλης δίνει Τρία παραδείγματα επ΄ αυτού:

(i) Την κοινή έννοια 3 του Ευκλείδη
(ii) Τον απαίτηση της μη αντίφασης[10]
(iii) Τον νόμο του αποκλειομένου τρίτου.[11]

Ο Αριστοτέλης , καθιστά σαφές, ότι αυτές οι λογικές αρχές , παρ΄ότι χρησιμοποιούνται ευρέως στις αποδεικτικές επιστήμες, είναι ουσιαστικά αναπόδεικτες.

---

[9] P. N. Kirahan σελ.10

[10] A.Y. 76$^{\alpha}$ 10-11 «τὸ dὲ μὴ ἐνδέχεσθαι ἅμα φάναι καὶ ἀποφάναι οὐ δεμίαλαμβάνει ἀπό δειξις»

[11] A. Y.77$^{\alpha}$ 12-21 «δείκνυται dὲ λαβοῦσι τὸ πρῶτον κατὰ τοῦ μέσου, ὅ τι ἀληθές, ἀποφάναι δ' οὐ κ ἀληθές. τὸ dὲ μέσον οὐ dὲν διαφέρει εἶναι καὶ μὴ εἶναι λαβεῖν, ὡ ς δ' αὕ τως καὶ τὸ τρίτον. εἰ γὰρ ἐδό θη, καθ' οὗ ἄνθρωπον ἀl hqὲς εἰπεῖν, εἰ καὶ μὴ ἄνθρωπον ἀληθές, ἀλλ' εἰ μό νον ἄνθρωπον ζῷον εἶναι, μὴ ζῷον dὲ μή, ἔσται [γὰρ] ἀl hqὲς εἰπεῖν Καλλίαν, εἰ καὶ μὴ Καλλίαν, ὅ μως ζῷον, μὴ ζῷον δ' οὔ . αἴτιον δ' ὅ τι τὸ πρῶτον οὐ μό νον κατὰ τοῦ μέσου λέγεται ἀλλὰ καὶ κατ' ἄλλου διὰ τὸ εἶναι ἐπὶ πλειό νων, ὥστ' οὐ δ' εἰ τὸ μέσον καὶ αὐ τό ἐστι καὶ μὴ αὐ τό , πρὸ ς τὸ συμπέρασμα οὐ dὲν διαφέρει.

Πριν τον Ευκλείδη;

Ο Thomas Heath εκτιμά , ότι εκτός από την νέα θεωρία που ωφείλετο στον Εύδοξο, και τις συνέπειές της σε όλη την έκταση των Στοιχείων του Ευκλείδη, υπάρχουν λίγα πράγματα που δεν είχαν στις βασικές τους γραμμές συμπεριληφθεί στο αναγνωρισμένο περιεχόμενο της Γεωμετρίας[12] και της Αριθμητικής μέχρι την εποχή του Πλάτωνα. Επί πλέον ο Εύδοδος είχε αναπτύξει την νέα θεωρία της αναλογίας μέχρι την εποχή του Αριστοτέλη. Πρέπει να θεωρείται ότι τα μαθηματικά ήταν εξελιγμένα και η επιτυχία τους πρέπει να αποδοθεί στην συστηματική φύση που είχαν αποκτήσει . Το παράδειγμα της λογικής διάθρωσης των προτάσεων των Στοιχείων είναι αψευδής μάρτυρας περί αυτού. Η Ι.1 των στοιχείων στηρίζεται στα προηγούμενα αξιώματα και ορισμούς, η επομένη στηρίζεται στην Ι.1 τα αξιώματα και τους ορισμούς κ.ο.κ.
Η σκέψη του Αριστοτέλη συνέβαλε τα μάλα σ΄αυτό, αν και πριν την εποχή του Αριστοτέλη, η αυστηρή δομή της διάθρωσης των προτάσεων , αλλά και της ίδιας της αποδεικτικής πορείας , φαίνονται στο μοναδικό διασωζόμενο έργο «Περί κινουμένης σφαίρας» του Αυτόλυκου του Τιτάνεως [13] .
Ακόμα είναι γνωστό ότι στην προευκλείδια γεωμετρία, υπήρχε διάκριση μεταξύ αναποδείκτων αρχών και αποδειξίμων προτάσεων, με ποικίλες αποδεικτικές αρχές. Επίσης και ορισμοί υπήρχαν και αξιώματα όπως μας αναφέρει ο Αριστοτέλης στα Α. Υ. στο υπό εξέτασιν χωρίο αλλά και

[12] P. N. Kirahan σελ.11
[13] P. N. Kirahan σελ.12

αλλού. Παραθέτει δε σποραδικά ορισμούς που ήταν τότε σε χρήση για να ασκήσει κριτική. Εδώ έχει θέση και η κριτική για την ανεπάρκεια του ορισμού της αναλογίας όπου δεν μπορεί να γίνει σύγκριση λόγου γραμμών και λόγου μεγεθών και υποδεικνύει την ίση ανταναίρεση που προείπαμε.

Πρέπει να υποθέσουμε βάσιμα, ότι ο Αριστοτέλης γνώριζε δύο από τα δύο είδη αρχών του Ευκλείδη. Λέγει ρητά ότι οι κοινές αρχές ονομάζονται αξιώματα.

Τα τρία πρώτα αιτήματα, μας δίνουν την δυνατότητα να κατασκευάσουμε συγκεκριμένες γραμμές και κύκλους , σύμφωνα με την γνώμη του Heath που την διετύπωσε στο «Mathimatics in Aristotele (Oxford University Press –1949)[14] Ουσιαστικά δηλαδή, τα τρία πρώτα αξιώματα σχετίζονται με τις αξιώσεις ύπαρξης που έθετε ο Αριστοτέλης, ονομάζοντάς τες υποθέσεις. Διότι ο Ευκλείδης, δεν θέτει αυτά τα τρία αιτήματα με την μορφή ισχυρισμών ύπαρξης, διότι η κατασκευασιμότητα, δεν είναι το ίδιο πράγμα με την ύπαρξη. Αλλά μπορούμε να πούμε, ότι τα τρία πρώτα αιτήματα κατασκευής, εγγυώνται κατ΄ ουσίαν για την ύπαρξη αυτού που κατασκευάζουν. Έτσι, αν εξαιρέσουμε τα δύο τελευταία αιτήματα που δεν είναι κατασκευαστικά, η ακολούθηση των αρχών του Αριστοτέλη από τον Ευκλείδη, είναι σαφεστάτη.[15]

Σε αυτό το σημείο ο R. N. Kirahan (σελ.18) προβληματίζεται για το αν και κατά πόσον , ακριβώς για τον λόγο του ότι η συσχέτιση είναι σαφεστάτη, είναι δυνατόν να επέδρασε τόσο αποφασιστικά ο Αριστοτέλης στον Ευκλείδη, αφού και ο ίδιος επηρεάσθηκε σε ένα βαθμό

[14] Σύμφωνα με την βιβλιογραφική παραπομπή του Ρ. Ν. Kirahan σελ.13

από τα ήδη γνωστά σε αυτόν μαθηματικά. Έτσι – συνεχίζει ο συγγραφέας- παραμένει πιθανόν ότι όταν συνέθετε τον κατάλογο των αρχών ο Ευκλείδης , να μην ήξερε το τι είχε πει ο Αριστοτέλης και απλώς να ακολούθησε την υπάρχουσα τότε μαθηματική παράδοση. Άλλωστε, υπήρχαν προευκλείδεια «στοιχεία» (Ομώνυμο έργο Ιπποκράτη Χίου –5ος αιώνας) .

Παρ´ όλες όμως τις επιφυλάξεις που μπορεί να διατυπώσει κάποιος, υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Ευκλείδης συνέβαλε στην κατάστρωση των αρχών της γεωμετρίας προσωπικά καθώς και ότι επηρεάσθηκε από τις αρχές της αποδεικτικής επιστήμης, έτσι όπως τις περιέγραψε ο Αριστοτέλης.

O Heath σχολιάζει το παρακάτω απόσπασμα του Αριστοτέλη από τα Α.Υ.(65a 4-7) «ὅ περ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰό μενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐ τοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες ἃ οὐχ οἷό ν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων.» Δηλαδή «είναι αυτό που κάνουν εκείνοι που νομίζουν ότι γράφουν παραλλήλους . Κάνουν λάθος αυτοί και προς τον εαυτό τους με το να παίρνουν ως δεδομένα αυτά που δεν είναι σε θέση να αποδείξουν αν δεν υπάρχουν οι παράλληλες.

Όμως το τέταρτο και το πέμπτο αίτημα λύνουν αυτό το πρόβλημα . Ο Ευκλείδης απαντά σε αυτή την ένσταση του Αριστοτέλη και θέτει τις προϋποθέσεις κατασκευής των παραλλήλων . Το τέταρτο αίτημα λέει ότι όλες οι ορθές είναι ίσες και το πέμπτο κατ´ ουσίαν είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των παραλλήλων η οποία έχει ως κριτήριο τις δύο ορθές. Με αυτόν τον τρόπο τίθενται οι προϋποθέσεις κατασκευής των παραλλήλων και έτσι η ένσταση του Αριστοτέλη απαντάται πλήρως.

---

[15] P. N. Kirahan σελ.18 και υποσημείωση 34 στην ίδια σελίδα.

Πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών εξ άλλου συμφωνούν , ότι ο Ευκλείδης είναι ο εφευρέτης-επινοητής των δύο τελευταίων αιτημάτων του[16].
Αν υποθέσουμε ότι αυτή η υπόθεση δεν είναι σωστή, και ο Ευκλείδης πήρε τα αιτήματα από κάποια άλλη πηγή των μαθηματικών , τότε πάλι το πιθανότερο είναι , ότι και αυτός ο άγνωστος ουσιαστικά είχε επηρεαστεί από τον Αριστοτέλη. Τείνουμε να πούμε, ότι σε κάθε περίπτωση, ο Αριστοτέλης έπαιξε σημαντικό ρόλο στην θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας .
Μια άλλη Αριστοτελική επιρροή στον Ευκλείδη , είναι η λογική αυστηρότητα και τα τρία είδη αρχών. Ακόμα και στα υπόλοιπα συγγράμματα του Ευκλείδη , αλλά και των άλλων σπουδαίων αρχαίων , όπως ο Αρχιμήδης ή ο Απολλώνιος δεν έχομε ανάλογης μορφής αυστηρότητα σε σχέση με τα στοιχεία και αυτά είναι περισσότερο τυπικά.[17]
Ο Πρόκλος μας λέει ευθέως , ότι ο πριν τον Ευκλείδη, οι αποδείξεις ήσαν χαλαρές[18] . Πρέπει έτσι να βγει το συμπέρασμα, ότι ο Ευκλείδης ανέβασε το επίπεδο της μαθηματικής δραστηριότητας της εποχής του , εξ αιτίας των φιλοσοφικών του αναζητήσεων στην λογική και την αξιωματική θεωρία, οι οποίες όμως φωτογραφίζουν πίσω τον Αριστοτέλη.
Ο **R. N. Kirahan ,** εκφράζοντας την προβληματική που έχει αναπτυχθεί από την κριτική των 2000 ετών στο έργο του Ευκλείδη , όπου κάποιοι όροι δεν είναι ορισμοί, κάποιες κοινές έννοιες δεν είναι κοινές , αλλά και

---

[16] π.χ. Ο πλέον έγκυρος , ο Heath , στα Στοιχεία του Ευκλείδη σελ. 202
[17] R. N. Kirahan σελ.19
[18].(Πρόκλος , σχόλια εις τα Στοιχεία σελ.68, 7-11) οὐ πό λυ dὲ τού των νεώτερό ς ἐστιν Εὐ κλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ mὲν τῶ Εὐ δό ξου συντάξας, πολλὰ dὲ τῶ Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι dὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύ μενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών.

αιτήματα που δεν σχετίζονται με κατασκευή. Ακόμα υπάρχουν κάποια βήματα στις αποδείξεις που δεν δικαιολογούνται ούτε από τα βήματα ,αλλά και ούτε από τις αρχές που έχουν παρατεθεί. Λόγου χάριν η Ι.1 έχει το πρόβλημα του πώς εξασφαλίζεται η τομή των δύο κύκλων. Έτσι η περίφημη αυστηρότητα του Ευκλείδη φαίνεται να υπονομεύεται.[19]

Ο Hilbert μας λέει ότι η γεωμετρία βασίζεται σε περισσότερες αρχές από όσες έχουν τα Στοιχεία του Ευκλείδη . Επίσης οι τάξεις των αρχών δεν ανταποκρίνονται σε κανένα από τα είδη των αρχών του Ευκλείδη. Λόγου χάριν υπάρχουν αξιώματα συνδέσεως , διατάξεως, ισότητας και το αξίωμα της παραλληλίας που είναι ισοδύναμο με το 5^{o} αξίωμα του Ευκλείδη και ακόμα το αξίωμα της συνέχειας. Επομένως πως μπορούν να εξηγηθούν τα προβληματικά στοιχεία;

Ο **R. N. Kirahan** δεν διστάζει να προβεί στην εξής ερμηνεία :

1) Ο Ευκλείδης περιόρισε τις αρχές του σε τρεις υπακούοντας στον Αριστοτέλη . Δεν υπήρχε κανένας μαθηματικός λόγος να περιοριστούν τα είδη των αρχών σε τρεις.
2) Πιθανόν , θα ήταν πιο κομψό να υπήρχαν τέσσερις αντί για τρεις. Για παράδειγμα να υπήρχαν οι γνωστές τρεις και επί πλέον όλες οι άλλες προτάσεις που παρουσιάζουν προβληματικό χαρακτήρα . Θα έπρεπε σε αυτή την κατηγορία να υπάρχει η εξασφάλιση της τομής των δύο κύκλων και γενικά να υπάρχουν τα αξιώματα του Hilbert που θεμελιώνουν στέρεα την Γεωμετρία.
3) Ο Ευκλείδης μπορούσε αναμφισβήτητα να θέσει την νέα κατηγορία.

Επομένως το ότι περιορίσθηκε στα τρία είδη αρχών , μας οδηγεί στο να εκφράσουμε , το συμπέρασμα ότι σε αυτή του την επιλογή οδηγήθηκε από την προσήλωσή του στις επιταγές του Αριστοτέλη.

[19] R. N. Kirahan σελ.22

Φαίνεται να επέμεινε στις αρχές του Αριστοτέλη και έθετε τις αρχές όπως του φαινόταν χρήσιμο. Για παράδειγμα, στον ορισμό 2 λέει «γραμμή δε μήκος απλατές» και αμέσως συμπληρώνει μια ιδιότητα της γραμμής αμέσως μετά ως ορισμό 3 «Γραμμής δε πέρατα, σημεία»
Έτσι το 4^{o} και το 5^{o} αίτημα, έχουν σχέση με την κατασκευή των παραλλήλων γραμμών . Επομένως είχε νόημα να τα τοποθετήσει κοντά μαζί με τα αιτήματα κατασκευής.
Εν κατακλείδι, τα φιλοσοφικά ενδιαφέροντα του Ευκλείδη και το ενδιαφέρον του για ζητήματα θεμελίωσης, προϋποθέτουν μια φιλοσοφική πηγή. Αυτή είναι τα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη.